

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

50e jaargang
1974/1975
no 8
april

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 25,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 26,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen.
Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.
Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,— (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).
Prijs nummer 4/5 *f* 9,50.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Openingsrede

door de voorzitter, Dr. P. G. J. Vredenduin, voor de jaarvergadering op zaterdag 2 november 1974 te Utrecht.

Het einde van het afgelopen verenigingsjaar viel samen met een belangrijke mijlpaal in ons voortgezet onderwijs. Het laatste bezemexamen is afgenomen en daarmee het laatste examen wiskunde volgens het oude programma. De vernieuwing van het wiskunde-onderwijs is thans voltooid.
Kunnen we blij en tevreden zijn? Blij wel; er is toch wel veel verbeterd vergeleken bij de vroegere situatie. Tevreden natuurlijk niet. Ten minste niet in die zin dat we menen een ideaal einddoel bereikt te hebben en voorlopig te kunnen freewheelen. De kritiek begint zich af te tekenen. Tegenover inhoud en zin van het programma wiskunde II staan velen vrij sceptisch, hetgeen mede in de hand gewerkt is door de omstandigheid dat geen enkele studierichting het opnemen van wiskunde II in het vakkenpakket verplicht gesteld heeft. Wel is gebleken dat een groot percentage van de abituriënten die zich aan een T.H. laten inschrijven, het vak wiskunde II gekozen hadden.
De toestand bij wiskunde I is geheel anders. De kennis van dit vak werd door een zo groot aantal studierichtingen als verplichte voorkennis gesteld dat het aantal gegadigden ervoor onverwacht groot bleek. De gevolgen bleven niet uit. Voor velen die het vak in hun pakket opnamen, bleek het te moeilijk. Ik hoef niet uit te weiden over de gevolgen die een dergelijke situatie in het huidige tijdsgewricht heeft. En toch: toegeven en het vak dan maar makkelijk maken zou niet juist zijn. Gelukkig is men met vereende krachten erin geslaagd tot een redelijke oplossing te komen. Staatssecretaris Klein heeft erop aangedrongen dat de Sociale Wetenschappen niet meer zouden eisen dan redelijkerwijs noodzakelijk is. Na veel wikken en wegen is er uiteindelijk een voor ieder aanvaardbare eis geformuleerd. Deze komt erop neer, globaal gezegd, dat de aanstaande studenten in de sociale wetenschappen, indien ze wiskunde I niet in hun vakkenpakket opgenomen hebben, getentamineerd zullen worden over de leerstof van de vijfde klas. En dus: wie wiskunde erg moeilijk vindt, doet verstandig het niet in zijn pakket op te nemen, maar later een aanvullingstentamen af te leggen. Het verdient aanbeveling, indien de schoolorganisatie dit mogelijk maakt, wiskunde I dan als achtste vak in de vijfde klas te volgen.
Het late stadium waarin de regeling tot stand gekomen is, had fatale gevolgen. Terecht voelden velen zich gedupeerd, die het voor hen moeilijke vak wis-

kunde gekozen hadden en tot de conclusie kwamen, dat er een eenvoudiger weg mogelijk geweest was om hun studiedoel te bereiken. De inspectie heeft een buitengewoon elegante oplossing gevonden om aan deze moeilijkheid het hoofd te bieden. In plaats van voor blanco werk 10 punten toe te kennen, werd dit aantal verhoogd tot 25. Het gevolg was dat juist de slechte kandidaten een voordeel toeviel. De onvoldoende cijfers werden verhoogd met 0,8 tot 1,5 punt. De goede kandidaten hadden er nauwelijks profijt van, maar dat was ook niet nodig. Ook volgend jaar zullen we nog te maken hebben met een kategorie van gedupeerden die wiskunde I gekozen hebben, doordat ze niet tijdig op de hoogte waren van de gemaakte regelingen; het daarop volgend jaar is daarvan echter beslist geen sprake meer.
De aanvankelijk overtrokken eisen van de sociale wetenschappen hebben toch ook een gunstige uitwerking gehad. Ze waren aanleiding zich af te vragen of ons wiskunde-onderwijs wel doelmatig voorbereidt op de eisen die studierichtingen voor welke wiskunde hulpwetenschap is, eraan zouden willen stellen. Zonder twijfel is de invoering van de statistiek een stap in de goede richting geweest, maar is deze stap voldoende? Allang leeft in de C.M.L.W. de overtuiging dat de computerkunde zo spoedig zijn intrede moet doen bij het avo en het vwo. Men acht dit echter niet meer voldoende. Is ons programma niet te theoretisch en wordt er te weinig rekening gehouden met de toepassing? Moet deze toepassing geen integrerend deel gaan vormen van het programma? Deze vraag was aanleiding voor de C.M.L.W. een commissie in het leven te roepen, de commissie Eckhaus, die zich speciaal met deze vraag moest bezighouden.
De plannen zijn nog lang niet uitgekristalliseerd, maar voorlopig denkt men aan twee wiskunde-programma's naast elkaar: een meer theoretisch programma waarin delen van het huidige wiskunde II opgenomen worden, en een meer praktisch gericht programma waarin toepassingen van de theorie een belangrijke rol spelen en waarin statistiek en computerkunde opgenomen worden. Gezien de huidige ontwikkeling van de maatschappij en van de inzichten in de functie van de school kan men zich ernstig afvragen, of voor een speciaal theoretisch gericht programma over enkele jaren nog plaats zal zijn en of men zich niet concentreren moet op het tweede alternatief. Ter geruststelling nog het volgende. Het is zeker niet de bedoeling van het departement op korte termijn een nieuwe reorganisatie van het wiskunde-onderwijs te bewerkstelligen. Men moet het voorgaande dus zien als een richting waarin gedacht wordt en niet als een soort zwaard van Damocles dat ons boven het hoofd hangt.
Is het vwo-programma overladen? Na de teruggang van 32 naar 30 uur en de daarmee samenhangende verlaging van de minimumtabel hebben we de grootste moeite in de onderbouw het programma af te werken. Op doelmatige wijze zijn we verplicht hier naar beste weten besnoeiingen aan te brengen, anders komen we er niet. Zoals bekend leven we nog onder de vigueur van een voorlopig programma. Een definitief programma ligt gereed en zal hopelijk binnenkort gepubliceerd worden. Veel soulaas zal dit voor de onderbouw niet brengen. Enkele vereenvoudigingen zijn aangebracht, maar veel kan niet meer geschrapt worden. Slechts één wijziging is ingrijpend: het onderdeel

wiskunde II is als leerstof voor de vierde klas geschrapt en daarvoor is in de plaats gekomen een inleiding in de differentiaalrekening voor alle leerlingen. Dit heeft het gunstige gevolg dat degeen die economie in zijn pakket opneemt, in de vierde klas daarvoor voldoende wiskundig voorbereid wordt en dat de natuurkundeleraar in het begin van de vijfde klas leerlingen krijgt die weten wat differentiëren is.
In de bovenbouw is thans de statistiek algemeen ingevoerd. Dit maakt het noodzakelijk dat in de vijfde en zesde klas voor wiskunde I 4+4 uren ter beschikking zijn. De voorbeeldtabellen voor ongedeeld vwo, die door het departement aan alle scholen gezonden zijn, vermelden dan ook voor de klassen 5 en 6 elk 4 uur wiskunde I. Op lang niet alle scholen worden deze uren ter beschikking gesteld. Laten de betrokken leraren er wel op aandringen, dat aan hun verlangens tegemoet gekomen wordt en laten zij zich daarbij gesteund voelen door de van overheidswege verstrekte voorbeeldtabellen. Alleen dan is er in de bovenbouw niet meer van overlading sprake.
Het havo.
Het eindexamen wiskunde nieuwe stijl is hier al geen novum meer. Reden voor bezorgdheid is er echter helaas stellig. Geklaagd wordt over een groot aantal onvoldoendes op het eindexamen, hetgeen frustrerend is niet alleen voor de leerlingen maar ook voor de leraren. Wat is hiervan de schuld? Een feit is dat tal van studiemogelijkheden verloren gaan als men de wiskunde niet kiest. Ook hier volgen velen daardoor de wiskundelessen pour besoin de la cause en niet omdat ze het graag willen en zeker niet omdat ze ervoor geschikt zijn. Het percentage onvoldoendes bleek op het schriftelijk examen dit jaar 40 te zijn. Voordat we hieruit conclusies trekken, moeten we ook naar de andere vakken kijken. Voor handelswetenschappen, voor economie, voor natuurkunde en voor scheikunde bleek eveneens een dergelijk hoog percentage onvoldoende prestaties geleverd te zijn. Alle examens die uit open vragen bestaan, leveren deze abominabele resultaten.
Het vermoeden ligt voor de hand dat de slechte resultaten van het wiskunde-examen een gevolg zijn van de capaciteiten van de leerlingen en niet van speciaal door de wiskundigen te hoog gestelde eisen. Het kon dan ook wel eens prematuur zijn, als de wiskundigen probeerden door eenzijdige maatregelen ten aanzien van hun vak hier tot een oplossing te komen.
Ook bij het havo vraagt men zich wel eens af, of het programma wel voldoende aangepast is aan de eisen van de praktijk. Het verdient zeker aanbeveling aan dit probleem aandacht te schenken. Het zou wel eens wenselijk kunnen blijken dat het havo daarbij eigen wegen zocht en niet zou nabootsen hetgeen voor het vwo besloten wordt.
Het mavo.
Voor het mavo geldt in grote trekken hetzelfde als hierboven voor het havo gezegd is. Ik wil niet in herhaling treden en me daarom liever beperken tot een specifiek aspect van het mavo-examen. Dit bestaat naast de open vragen uit een serie die volgens de multiple choice methode beantwoord moet worden. Met grote bewondering heb ik mij in deze opgaven verdiept. De wijze waarop men tot nog toe kans gezien heeft uit de betrekkelijk beperkte stof een veelheid van originele vragen samen te stellen waarin niet alleen routine maar ook een

zekere mate van inzicht getest wordt, getuigt van grote vakbekwaamheid. Ondanks dit wil ik toch een voorzichtig kritisch geluid laten horen. Een kritisch geluid dat echter volstrekt niet negatief bedoeld is, maar eerder als een poging tot constructieve raadgeving.
Het reageren op multiple choice vragen vereist een afzonderlijke training. Soms kan men een vraag beantwoorden door een andere denkmethode te volgen dan men zou doen, als alleen een antwoord gevraagd werd. Het centraal corrigeren vereist veel tijd. Bovendien is het kostbaar. En het opstellen van de vragen vergt een grote hoeveelheid energie en manuren. De resultaten dreigen wel eens schijnresultaten te zijn, zoals zojuist al vermeld is.
Zou het mogelijk zijn tot een andere toetsingsmethode te komen, die in wezen hetzelfde beoogt als de multiple choice methode, namelijk door het stellen van eén groot aantal korte vragen kennis en inzicht van de kandidaat aan een onderzoek te onderwerpen? Ik meen dat de olympiade-commissie ons daartoe de weg gewezen heeft. In de eerste ronde krijgen de kandidaten een aantal (weliswaar niet korte) vragen waarop ze het antwoord moeten geven zonder nadere toelichting. Op een dergelijke manier zou men ook het mavo-examen kunnen inrichten. Men zou een groot aantal vragen kunnen geven, al zou 30 dan wellicht te veel zijn, waarop de kandidaten alleen het antwoord moeten geven. Aan de bovengenoemde bezwaren tegen de multiple choice methode zou dan voor een groot deel tegemoet gekomen worden. Bovendien zou het raadelement een geringere rol spelen. Als enig nadeel zie ik, dat de invloed van reken- en slordigheidsfouten groter kan worden.

De koppeling van het lto-t examen aan het mavo-3 examen is een zeer gelukkige. De door het lto-t verkregen resultaten liggen over het algemeen iets boven die welke door het mavo-3 verkregen worden. Ik hoop, dat ook als het kwijnende mavo-3 schooltype ten onder mocht gaan, de band tussen lto-t en mavo niet verbroken zal worden.
Tot slot een enkel woord over het examen in het algemeen, al betreft het niet speciaal de wiskunde. We hebben op het vwo thans een jaar schoolonderzoek en modern examineren meegemaakt. Het mondeling examen is verdwenen. De schoolontwrichting ten gevolge van het schoolonderzoek is in vele gevallen niet minder groot gebleken dan ten gevolge van het mondeling examen. De individuele kandidaat is een nummer geworden. Vroeger kon men op de bres staan voor een kandidaat die dat verdiende en waarvoor het nodig was. Tegenwoordig hebben we alleen maar de onvolprezen objectiviteit. Vroeger werkten de leerlingen voor een eindexamen, al was het wel eens te kort en te weinig intensief. Tegenwoordig werken ze een heel jaar onder druk. Ze werken hard, maar met negatieve motivering. En dat terwijl men op positieve motivering, terecht, tegenwoordig zoveel prijs stelt. Het examen is tot een machinale bezigheid geworden. Ik weet dat hierin de eisen van de moderne maatschappij weerspiegeld worden; men wil een optimaal uniforme beoordelingswijze. Maar betreurenswaardig blijf ik het vinden.

S.M.P. Book 1-5

P.G.J. VREDENDUIN

Oosterbeek

In een vorig artikel heb ik een beschrijving gegeven van de inhoud van de boeken A-H van de S.M.P.[1] Deze boeken waren bestemd voor de comprehensive schools en te vergelijken met onze mavo-uitgaven. Ze zijn verkregen door bewerking van de oorspronkelijke boeken 1-5, die bestemd zijn voor opleiding tot het examen op O-level. Over deze 5 boeken wil ik thans iets vertellen.

Allereerst de formele mededeling dat ze gemiddeld 300 blz. dik zijn en per stuk gebonden £ 1,65 kosten. Op de band vindt men achter de titel de toevoeging [metric]. Dit wil zeggen, dat de maten en gewichten aangepast zijn aan de spoedig in Engeland in te voeren decimale verdeling. Men vindt dus kilogrammen, liters en kilometers en geen miles, acres, gallons en wat dies meer zij.

Een min of meer systematische bespreking van de inhoud van deze vijf boeken zou te veel een herhaling van het vorige artikel met zich meebrengen. Ik wil me hier dan ook beperken tot algemene gezichtspunten en wat aardige details weergeven zonder daarbij volledigheid na te streven.

Wie het vorige artikel gelezen heeft, zal zich afvragen of de geesteshouding ten opzichte van het wiskunde-onderwijs daar bepaald werd door de omstandigheid dat voor een breed leerlingenpubliek geschreven werd. Dit was niet het geval. Leest men de boeken 1-5, dan ziet men dat in principe op dezelfde wijze tewerk gegaan wordt. Wel is een duidelijk niveauverschil merkbaar; de boeken 1-5 zijn moeilijker geschreven.

Laat ik beginnen met een overzicht van de leidende gedachten die ik in de boeken heb menen te ontdekken.

1 Bij elk nieuw onderwerp wordt uitgegaan van een concrete situatie uit de praktijk. Aan de hand hiervan worden begrippen ontwikkeld en vaak ook eigenschappen afgeleid. Men zou haast kunnen zeggen, dat niet in eerste instantie gestreefd wordt naar toepassing van de wiskunde op de werkelijkheid, maar dat door mathematisering van de werkelijkheid de wiskunde tot stand komt.

2 Er is geen sprake van een systematische opbouw van de wiskunde. In een hoofdstuk wordt een bepaald onderwerp aangesneden. Het volgende hoofdstuk staat los van het voorgaande. Wel wordt t.z.t. de gedachte die in een bepaald hoofdstuk opgenomen is, voortgezet.

1. Euclides **48**, nr. 6.

3 Van een systematische opbouw van een getalsysteem is uiteraard geen sprake. Ook vindt men geen uitgebreide training in algebraïsch rekenwerk. Natuurlijk wordt er wel gerekend bij het oplossen van vergelijkingen en bij bespreking van functies, maar dit rekenwerk blijft zeer eenvoudig.
4 Men is tevreden, als een begrip zover is ontwikkeld, dat de betekenis ervan door de leerling begrepen wordt. Het ten slotte vastleggen van de betekenis van een begrip in een definitie komt vrijwel niet voor. Ik heb expliciete definities gevonden van de hoek van een lijn en een vlak en van de hoek van twee vlakken, maar meen er verder geen gezien te hebben.
5 Echte bewijzen zal men vrijwel niet aantreffen. Natuurlijk worden eigenschappen afgeleid en worden daarbij redeneringen gebruikt. Deze hebben echter meestal de vorm van een vraaggesprek waarin de leerling uitgenodigd wordt zijn aandacht eens hierop en daarna daarop te richten en hem dan verzocht wordt de juiste conclusie te trekken. De leerling vindt alles min of meer zelf.
6 Bij de keuze van de onderwerpen is men er veelal van uitgegaan welke onderwerpen in huidige praktische toepassingen een rol spelen.
Het is niet mijn bedoeling deze punten te commentariëren, want het is in dit verband van geen enkel belang hoe ik hierover denk. Toch kan ik niet nalaten één opmerking te maken van subjectieve aard. De manier waarop wiskundige begrippen geïntroduceerd worden, heeft me erg geboeid. Ik geloof stellig, dat we daar iets van leren kunnen. Het als het ware halen van de begrippen uit de praktijk en ook het demonstreren van de draagwijdte van eigenschappen aan praktische voorbeelden, moet voor de leerling niet alleen verduidelijkend werken, maar zal hem ook meteen doen beseffen waarvoor wiskunde belangrijk is. Het achteraf toepassen van gevonden resultaten op de praktijk is vaak veel moeilijker en ook minder overtuigend.
Nu enige grepen uit de inhoud.

Hoeken en goniometrische verhoudingen. In book 1 worden hoeken ingevoerd als draaiingen. Draaiingen niet in de zin van afbeeldingen, maar als fysische draaiingen. Hierdoor ontstaat meteen verschil tussen hoeken van $-120°$, $240°$, $600°$, enz. Ik moet niet aan de ellende denken die ontstaan zou, als men deze bepaling van een hoek in een mathematisch verantwoord gewaad zou willen steken. Maar dat is de bedoeling dan ook niet. Bij het definiëren van goniometrische verhoudingen van willekeurige hoeken heeft men profijt van de wijze waarop de hoeken hier ingevoerd zijn.
Sinus en cosinus worden in book 2 ingevoerd. We gaan daar uit van een centrale richting en een object dat zich beweegt. In fig. 1 beweegt een voorwerp zich over een afstand $FG = 10$ m. Daarbij is de verplaatsing in de centrale richting $FP = 9{,}4$ m en de verplaatsing zijdelings $PG = 3{,}4$ m. De hoek die de richting van de verplaatsing maakt met de centrale richting, is $20°$. De volgende stap is natuurlijk de grootte van de verplaatsing gelijkmaken aan 1 eenheid en daarmee zijn de sinus en de cosinus van scherpe hoeken gedefinieerd. Stompe hoeken geven geen nieuw probleem en daar blijft het voor het moment bij.

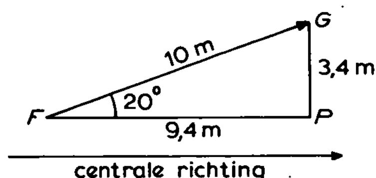


Fig. 1

In book 3 gaan we verder. Met behulp van een eenheidscirkel worden hier op de gebruikelijke manier de sinus en de cosinus van willekeurige hoeken gedefinieerd. Daarbij is voldoende materiaal verzameld om een sinusgolf te kunnen tekenen. Het spreekt wel vanzelf, dat meteen ingegaan wordt op het grote belang van sinusgolven in de natuurbeschrijving.

Van de tangens totnogtoe geen spoor. Deze zien we tevoorschijn komen in book 4. Iemand staat op een afstand van 100 meter van een gebouw en ziet de top onder een hoek van 50°. Hoe hoog is het gebouw? Een directe aanloop om te komen tot de tangens van een scherpe hoek. Waarom heet deze verhouding tangens? Het antwoord wordt gegeven door middel van fig. 2. Aan een eenheidscirkel is een raaklijn getrokken. In het midden bevindt zich een aan weerszijden open buisje met daarin een lamp. Het buisje is draaibaar. Een lichtvlek wordt geworpen op het punt T. De tangens van de draaiingshoek $\theta°$ is dan gelijk aan de lengte van AT. Omdat hoeken geïdentificeerd zijn met fysische draaiingen, is daarmee meteen vastgelegd wat de tangens van een willekeurige hoek is.

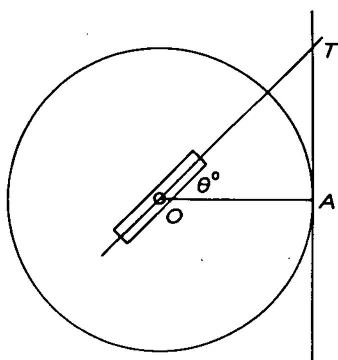


Fig. 2

In book 3 is in het hoofdstuk Rates of Change uiteengezet wat het wil zeggen, dat de steilte van een weg 1 : 10 is. Nu blijkt dit de tangens van de hellingshoek te zijn.

Matrices. Bij de bespreking van de boeken A-H is al gebleken, dat men grote belangstelling heeft voor matrices en hun toepassing. Hier volgt nog een aardige toepassing van matrices uit book 3. Elke relatie kan voorgesteld worden door een matrix die alleen uit 0'en en 1'en bestaat. Dit passen we toe op relaties ontleend aan onderstaande figuur.

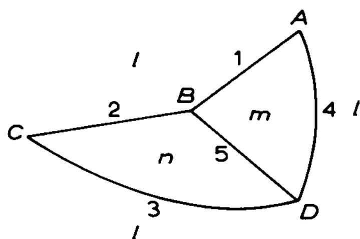


Fig. 3

In deze figuur zien we 4 knooppunten, 5 verbindingsbogen en 3 gebieden. We beschouwen onderstaande drie matrices. De matrix R betreft de relatie: punt x is uiteinde van boog y.

matrix R — rijen: punten, kolommen: bogen

punten	1	2	3	4	5
A	1	0	0	1	0
B	1	1	0	0	1
C	0	1	1	0	0
D	0	0	1	1	1

Matrix S betreft de relatie: boog x is begrenzing van gebied y.

matrix S — rijen: bogen, kolommen: gebieden

bogen	l	m	n
1	1	1	0
2	1	0	1
3	1	0	1
4	1	1	0
5	0	1	1

Matrix T betreft ten slotte de relatie: punt x is hoekpunt van gebied y.

matrix T — rijen: punten, kolommen: gebieden

punten	l	m	n
A	1	1	0
B	1	1	1
C	1	0	1
D	1	1	1

Nu gaan we met deze matrices jongleren. Vorm het produkt RS. Wat is de betekenis van dit produkt? Er blijkt, dat

$$RS = 2T$$

Schrijf de getransponeerde R' van R op en werk het produkt RR' uit. Dit blijkt te zijn de matrix M:

matrix M

	A	B	C	D
A	2	1	0	1
B	1	3	1	1
C	0	1	2	1
D	1	1	1	3

Dit is de 'routematrix' die het aantal verbindingsbogen tussen de punten x en y aangeeft. Met uitzondering van de getallen op de hoofddiagonaal. Deze geven aan het aantal bogen die in het betreffende punt samenkomen.
Een andere toepassing van matrices. In book 4 komt de matrix van een lineaire transformatie van het platte vlak ter sprake. Door de transformatie met matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

wordt het eenheidsvierkant overgevoerd in een parallellogram waarvan de oppervlakte gelijk is aan de determinantwaarde van deze matrix. Bij deze transformatie worden dus alle oppervlakten met 8 vermenigvuldigd. Dit passen we toe op de orthogonale hyperbool die grafiek is van $y = \frac{1}{x}$. Zie fig. 4.
De transformatie met matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

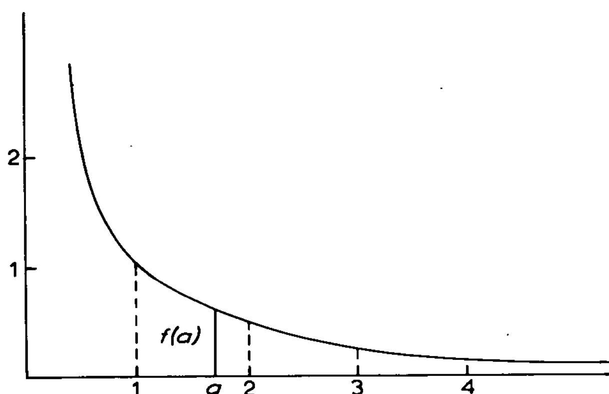


Fig. 4

voert elk punt $(a, \frac{1}{a})$ van de hyperbool over in een punt $(2a, \frac{1}{2a})$, dat weer op de hyperbool ligt. Bovendien laat deze transformatie oppervlakten onveranderd. Hieruit leidt men direct af, dat de oppervlakte onder de hyperbool tussen de lijnen $x = p$ en $x = q$ gelijk is aan die tussen de lijnen $x = 2p$ en $x = 2q$ (waarin de factor 2 uiteraard arbitrair is).

De oppervlakte onder de hyperbool begrensd door de lijnen $x = 1$ en $x = a$ noemen we $f(a)$. Dan volgt uit het voorgaande

$$f(a) + f(b) = f(a \cdot b)$$

De functie f gedraagt zich dus net zo als de logaritme.
Tenslotte een toepassing op het gebied van oplossen van vergelijkingen. Er is reeds verklaard wat verstaan wordt onder de inverse van een matrix. De inverse van de matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

blijkt te zijn

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{7}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Gevraagd wordt nu op te lossen het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} 3x + 7y &= 2 \\ x + 5y &= 3 \end{aligned}$$

Een andere manier om dit stelsel te schrijven is

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En nu is meteen de oplossing gevonden. Vermenigvuldig beide leden met de inverse van de linker matrix. Er komt dan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{7}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Het behoeft geen betoog, dat dit niet de enige manier is waarop een stelsel van twee eerstegraads vergelijkingen met twee veranderlijken opgelost wordt. Aan deze methode zijn de gebruikelijke voorafgegaan.

Netwerken en graffen. Fig. 5 stelt een netwerk van een kubus voor. In elk zijvlak is een punt gekozen en deze punten zijn door de gestippelde lijnen verbonden, waardoor een nieuw netwerk ontstaat, het duale van het oorspronkelijke. Dit nieuwe netwerk is kennelijk een netwerk van het regelmatige achtvlak dat in de kubus beschreven kan worden.

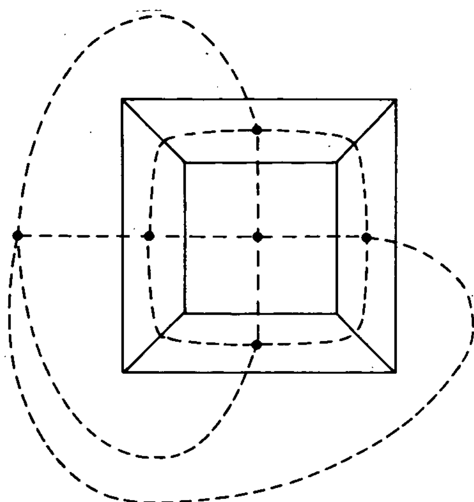


Fig. 5

Dit probleem is een inleiding voor het volgende tweetal praktische problemen, waarbij graffen een belangrijke rol spelen.
In fig. 6 is een graf getekend van een wegennet. De bij de bogen geschreven getallen stellen de lengte van de wegstukken voor in km. Gevraagd de lengte van de kortste verbinding tussen *A* en *B*.
En nu meteen het tweede probleem. We gaan uit van het wegennet in fig. 6. Maar nu stellen de getallen voor de maximale hoeveelheden auto's in honderdtallen die de betreffende wegstukken per uur kunnen verwerken. Gevraagd wordt naar het maximale aantal auto's dat per uur van *A* naar *B* kan gaan.

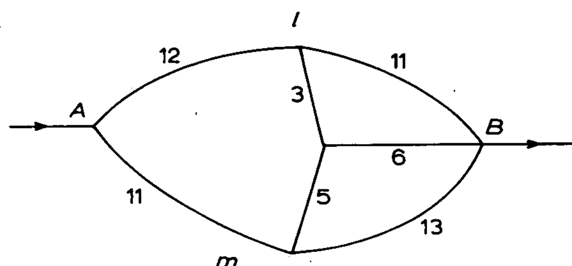


Fig. 6

In fig. 7 is de graf van fig. 6 overgetekend met zijn duale.

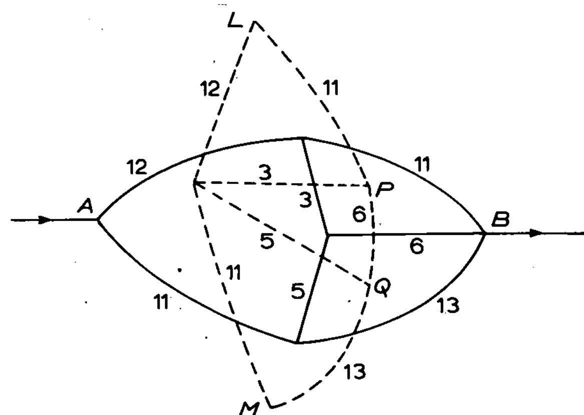


Fig. 7

Nu volg ik zo ongeveer de didactiek van de S.M.P.
Welk antwoord krijg je uit het eerste probleem?
Als in de duale graf de getallen ook kilometerafstanden zouden voorstellen, hoe lang zou dan de kortste verbindingsweg van L en M zijn?
Waarom zijn twee schijnbaar verschillende problemen op deze manier met elkaar in verband gebracht? Let eens op $LPQM$. Deze weg verdeelt de originele graf in twee delen. De totale capaciteit van het wegennet kan niet groter zijn dan de som van de getallen die bij de bogen LP, PQ en QM staan. De maximum capaciteit van het wegennet is dus gelijk aan de minimale lengte van een (duale) doorsnede.
Het aantal km dat men als antwoord van het eerste probleem vindt, is dus gelijk aan het aantal honderdtallen dat het antwoord van het tweede probleem is.
Men ziet twee dingen bevestigd:
a de voorliefde om problemen uit de praktijk mee te laten bepalen welke onderwerpen men behandelen wil;
b de neiging niet in het boek de problemen tot het laatst uit te pluizen, maar de leerlingen zo te leiden, dat ze zelf het probleem denkend tot een goed einde brengen.
Aansluitend nog een aardig probleempje, dat *operations research* in de dop verraadt.

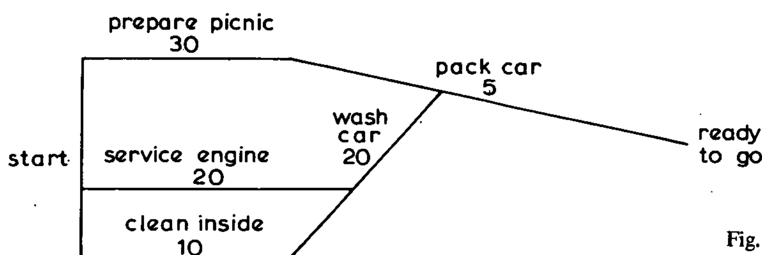


Fig. 8

U ziet wat er gedaan moet worden en hoe lang alles duurt. Waar moeten we mee beginnen? Hoe lang kunnen de andere activiteiten uitgesteld worden? Hoeveel tijd hebben we in totaal minstens nodig?

Uit het voorgaande blijkt al, dat op verschillende onderwerpen dieper ingegaan wordt dan in de delen A-H. We zullen nu laten zien, dat ook aan de traditionele wiskundetechniek meer aandacht besteed wordt, met name aan de *functies*.
Een functie, zoals

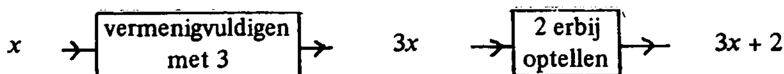
$$f: x \to x - 4$$

wordt vergeleken met een machine. Een input 9 levert een output 5.
Nu de functie

$$x \to 3x + 2$$

Hier moet eerst x met 3 worden vermenigvuldigd en dan bij de uitkomst 3 opgeteld worden. Hier hebben we dus te maken met een samengestelde machine,

waarvan de werking geïllustreerd kan worden met behulp van het volgende flow-diagram:



Noem de functies

$$f : x \rightarrow 3x \text{ en } g : x \rightarrow x + 2$$

dan is

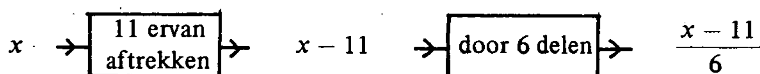
$$g(f(x)) = 3x + 2$$

Hierop volgt een introductie van het begrip inverse functie met behulp van de volgende serie vragen.
a Stel de matrix R op die correspondeert met de relatie '$x \rightarrow$ veelvoud van x' (notatie conform S.M.P.) met domein $\{2, 3, 7\}$ en bereik $\{6, 8, 9, 21\}$. (Dit is dus weer een matrix die uit uitsluitend 0'en en 1'en bestaat.)
Schrijf de getransponeerde matrix R' van R op, die met de inverse relatie correspondeert.
Bereken RR' en $R'R$.
b Wat is het bereik van de functie $x \rightarrow 2x$ voor klokrekenen in $\{0, 1, 2\}$?
Stel de matrix F op die met deze functie correspondeert.
Schrijf de getransponeerde F' van F op.
Correspondeert met F' een functie?
Bereken FF' en $F'F$. Hoe verklaar je het resultaat?
c Zelfde vragen voor de functie $x \rightarrow x^2$ voor klokrekenen in $\{0, 1, 2\}$.

Hoe vinden we een inverse, b.v. de inverse van

$$x \rightarrow \frac{x-11}{6}\ ?$$

Het flow-diagram biedt uitkomst:



Nu terug: eerst met 6 vermenigvuldigen, dan 11 erbij tellen. De inverse is dus

$$x \rightarrow 6x + 11$$

Met behulp hiervan kunnen we sommige vergelijkingen oplossen, b.v.

$$\tfrac{1}{8}(3x + 4) = 2$$

Eerst tekenen we het flow-diagram



Daarna tekenen we het flow-diagram van de inverse functie. Kies nu als input 2 *en de output is de gevraagde wortel.*
Natuurlijk gaat het niet altijd zo mooi. Als de veranderlijke in beide leden voorkomt, moeten we andere methoden te hulp roepen. Dit geschiedt in book 4 (het bovenstaande is ontleend aan book 3). Hier wordt vermeld, dat

$$a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$$

Hieruit wordt afgeleid, dat uit een vergelijking een daarmee gelijkwaardige ontstaat als we

beide leden met hetzelfde getal vermenigvuldigen,
van beide leden hetzelfde getal aftrekken,
beide leden met hetzelfde getal vermenigvuldigen,
beide leden door hetzelfde getal delen.

Met enige verbazing bekeek ik de voor de S.M.P. ongewoon theoretische fundering van deze simpele resultaten. En toen las ik: 'This section is not difficult but it may well be omitted, for the conclusions reached may be considered too obvious to need justification.'
En nu volgde o.a.

$$\begin{aligned}
& 9x + 5 = 3x \\
\Longleftrightarrow\ & 9x + {}^{-}3x + 5 = 3x + {}^{-}3x \\
\Longleftrightarrow\ & 6x + 5 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 6x + 5 + {}^{-}5 = 0 + {}^{-}5 \\
\Longleftrightarrow\ & 6x = {}^{-}5 \\
\Longleftrightarrow\ & \tfrac{1}{6} \cdot 6x = \tfrac{1}{6} \cdot {}^{-}5 \\
\Longleftrightarrow\ & x = \tfrac{{}^{-}5}{6}
\end{aligned}$$

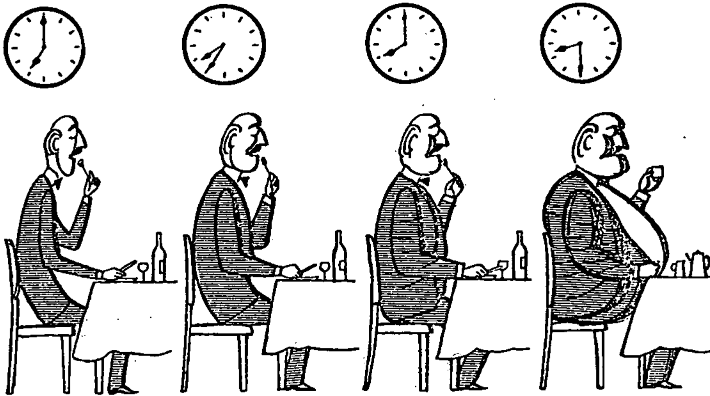
(Consequent wordt volgehouden de negatieve getallen te schrijven in de vorm ^{-}a)
In book 4 worden ook de functies weer ter hand genomen. Van verschillende functies worden grafieken getekend zonder dat daarbij meer gebeurt dan het tekenen van punten en het verbinden daarvan. Zo wordt b.v. wel de grafiek getekend van een kwadratische functie, maar wordt niet de grootte van het extreem afgeleid. De grafieken worden gebruikt voor het grafisch oplossen van twee vergelijkingen met twee veranderlijken, b.v.

$$\frac{1}{x} = \tfrac{1}{4}x + 1$$

Dat niet slechts theoretisch belang aan functies gehecht wordt, maar dat ook hun praktische betekenis ter sprake komt, blijkt uit het volgende kostelijke plaatje boven hoofdstuk 8.

8

SEARCHING FOR FUNCTIONS



In dit hoofdstuk wordt langs experimentele weg verband opgespoord tussen verschillende grootheden en dan met behulp van een grafiek de aard van dit verband opgespoord. Zo wordt b.v. een serie waarnemingsresultaten gegeven betreffende de lengte l van een slinger en de slingertijd t. De corresponderende punten liggen kennelijk niet op een rechte lijn. Teken nu in de grafiek de punten met coördinaten l^2 en t. Deze punten blijken (eventueel bij benadering) wel op een rechte lijn te liggen, en wel een rechte lijn door de oorsprong. Waarmee gevonden is, dat t evenredig is met l^2.

Op soortgelijke wijze blijkt bij een gas de druk evenredig te zijn met het omgekeerde van het volume, omdat de uit experimenten afgeleide punten (p, v^{-1}) bij benadering op een rechte lijn door de oorsprong liggen.

In book 5 komen we de kwadratische functies opnieuw tegen. Ditmaal vormen ze het startpunt om te komen tot het oplossen van vierkantsvergelijkingen. Echter nog steeds geen bepalen van uiterste waarden.

Dit boek biedt weinig nieuwe gezichtspunten. Voor de helft bestaat het uit herhalingsparagrafen. Veel praktische dingen worden erin behandeld: het numeriek vinden van de oppervlakte onder een grafiek, de geometrie van de aarde, praktische voorbeelden betreffende toepassing van het rekenen waarin ter sprake komen verhitting van een huis en warmteverliezen, investering, samengestelde intrest, huurwaarde, kopen van een huis, inkomstenbelasting, verder lineaire programmering en drie orthogonale projecties van een voorwerp.

Hoeveel tijd heeft men om deze vijf uitgebreide boeken door te werken? De meeste scholen besteden er gedurende vijf jaar elk jaar vier of vijf lesuren aan. Een lesuur duurt 40 of 45 minuten en het aantal lesweken per jaar bedraagt 36. Veel werk wordt door de leerlingen zelf verricht, niet alleen het maken van vraagstukken maar ook het bestuderen van de theorie. De leraar is aanwezig om te helpen en leiding te geven. Niet alle leerlingen werken in hetzelfde tempo. Leerlingen met een lager tempo maken minder vraagstukken en slaan soms hele paragrafen over.

Om de lezer een indruk te geven van de eisen die door de universiteit gesteld worden aan een kandidaat die het eindexamen wiskunde op O-level wil afleggen, volgt hier een stel examenopgaven.

OXFORD AND CAMBRIDGE SCHOOLS EXAMINATION BOARD

General Certificate Examination Ordinary Level

SCHOOL MATHEMATICS PROJECT

ELEMENTARY MATHEMATICS I

Wednesday 14 July 1965. $2\frac{1}{2}$ Hours

Candidates should answer as many questions as possible. Questions in sections B *and* C *in general carry more marks than those in Section* A.

Answers should be written on the question paper in the spaces provided, and the question paper handed in at the end of the examination. No working need *be shown, but candidates may use any available space for intermediate work, or for diagrams if they wish. Paper for rough work will also be provided; this should not be handed in.*

In questions involving numerical calculations slide rule accuracy is sufficient unless there is a clear indication to the contrary.

Section A

1. State a fraction whose value lies between $\frac{1}{2}$ and $\frac{4}{9}$.

Answer . . . .

2. State the number 0·07346 correct to three significant figures.

Answer . . . .

3. Find the value of ab/c where $a = 10^6$, $b = 10^7$ and $c = 10^{-3}$.

Answer . . . .

4. If $a*b$ denotes $a+2b$, where a and b are real numbers, calculate (i) $3*2$; (ii) $2*3$.

Answer (i) . . . .

(ii). . . . .

What do the results of (i) and (ii) show about the nature of the operation $*$?

. . . .

. . . .

. . . .

5. If $n(A) = 10$ and $n(B) = 6$, what are the greatest and least values of $n(A \cup B)$?
Draw Venn diagrams to illustrate the cases in which $n(A \cup B)$ has these extreme values.

Answers . . . .

6. Solve the equation $11x = 1001$, the numbers being binary, giving the solution in binary.

Answer . . . .

7. Make c the subject of the formula

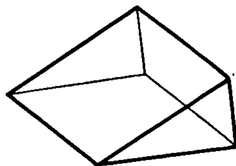
$$T = \frac{3}{\sqrt{c}}.$$

Answer ....

8. If $\mathscr{E} = \{\text{quadrilaterals}\}$,
and $P = \{\text{quadrilaterals with point symmetry}\}$,
and $Q = \{\text{quadrilaterals with line symmetry}\}$,
draw a quadrilateral which is a member of $P' \cap Q$.

Diagram: ....

9. In the solid shown all faces are either rectangles or triangles.

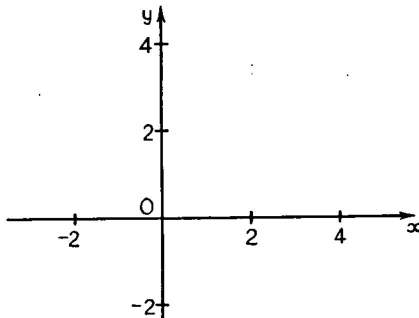


Draw a net for the solid, indicating any lengths which need to be equal.

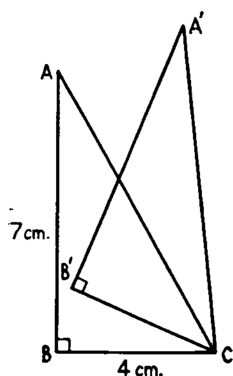
10. Write down an ordered set of 5 integers whose mean is 4 and whose median is 3.

Answer ....

11. Mark on the diagram the reflection of $(3, -1)$ in the line $y = x$, stating its coordinates.



12. The triangle $A'B'C$ is the image of the triangle ABC under a clockwise rotation of 20° about C.

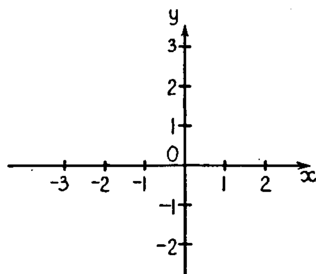


(i) Calculate $C\hat{A}A'$.
(ii) Calculate $A\hat{C}B$, stating the result correct to the nearest $\frac{1}{2}°$.

Answer (i) . . . .

(ii) . . . .

13. Sketch a simple curve whose gradient is negative at the point where $x = -2$ and whose gradient is zero at the point where $x = 1$.



14. If N is the north pole, and A and B are points on the equator with longitudes 10° W. and 100° W., express the area of the earth's surface bounded by NA, NB and AB as a fraction of the earth's total surface.

Answer . . . .

Section B

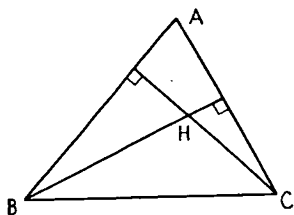
In this section ring the letter corresponding to the correct answer, or answers. Where appropriate, ring letters in the second line to indicate which statements are false, as well as letters in the first line to indicate which are true.

15. The distance between two parallel planes is 6 in. The locus of a point equidistant from these planes and 3 in. away from a line in one of the planes is (*a*) a single point; (*b*) a single line; (*c*) two lines; (*d*) none of these.

(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

16. In the diagram shown the angle BHC is equal to (*a*) A; (*b*) $2A$; (*c*) $180° - A$; (*d*) $360° - A$.

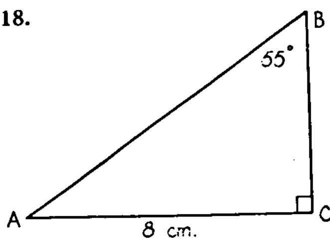
(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)



17. The value of $\sqrt{4840}$ is (*a*) 22; (*b*) 220; (*c*) between 69 and 70; (*d*) none of these.

(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

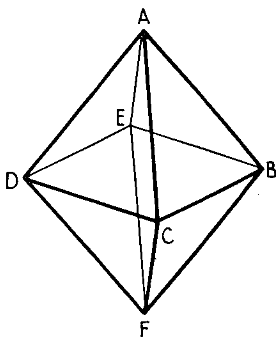
18.



The length AB, in cm., is (*a*) $8\sin 55°$; (*b*) $8/\sin 55°$; (*c*) $8/\cos 35°$: (*d*) $8\tan 55°$.

(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

19. The diagram shows a regular octahedron $ABCDEF$. Which of the following statements are true, and which false?



(*a*) The solid has exactly eight faces, six vertices, and eight edges.

(*b*) The angle $ACE = 60°$.

(*c*) $EC = AF$.

(*d*) There are four distinct routes from A to B along the edges of the solid and passing through just two other vertices.

True: (*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

False: (*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

20. If x, y, z are positive numbers such that $x = y^2$ and $z = 1/y$, which of the following statements are true and which false?

(*a*) $x > y$ for all $y > 1$;

(*b*) $y > 1 \Rightarrow z < 1$;

(*c*) $z = 3 \Leftrightarrow x = 9$;

(*d*) $x = 1/z^2$.

True: (*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

False: (*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

21. If P means 'reflect in Ox', and Q means 'reflect in the line $x = 4$', and if Z is the point $(-1, 3)$, which of the following statements are true and which false?

(*a*) $P(Z) = (-1, -3)$;

(*b*) $Q(Z) = (-1, 1)$;

(*c*) $PQ(Z) = (-9, 3)$;

(*d*) $PQ = QP$;

(*e*) $P^2 = I$ (where I is the identity transformation).

True: (*a*) (*b*) (*c*) (*d*) (*e*)

False: (*a*) (*b*) (*c*) (*d*) (*e*)

Section C

22. $\mathcal{E} = \{x: -10 \leqslant x \leqslant 10\}$.
$P = \{x: -10 < x < 10\}$.
$Q = \{x: -5 < x \leqslant 3\}$.
$R = \{x: 3 \leqslant x < 5\}$.

Write down expressions for (*a*) P'; (*b*) $Q \cap R$; (*c*) $Q \cup R$; (*d*) $Q \cap P'$.

Answer (*a*) ....

(*b*) ....

(*c*) ....

(*d*) ....

23. The map coordinates of A and B are (537, 172) and (537, 192) respectively, the units being kilometres. The points representing A and B are 4 cm. apart on a map.

(i) State the distance and bearing of A from B.

(ii) Calculate the representative fraction of the map (i.e. the scale in the form $1/n$).

Answer (i) ....

(ii) ....

24. Place one of the signs $\Rightarrow$ or $\Leftarrow$ or $\Leftrightarrow$ if appropriate between the following statements. If none is appropriate, say so.

(i) ΔABC is similar to ΔPQR.	ΔABC is congruent to ΔPQR.
(ii) $A \subset B$.	$B' \subset A'$.
(iii) The lines p and p' are images of each other in the line m.	The line m bisects one of the angles between the lines p and p'.
(iv) $x > 3$.	$(x - 3)(x - 2) > 0$.

25. (i) Express the equations

$$2p + 2q = 8,$$
$$5p - 3q = 7$$

in matrix form.

(ii) Write down a matrix which you could use to solve these equations. (You are not required to solve them.)

Answer (i) ....

(ii) ....

26. The volume of a spherical soap-bubble is increasing at a steady rate of 7 c.c. per sec. At a certain instant the volume is 1 c.c.

(i) If the volume is v c.c. after t sec., write down a formula for v in terms of t.

(ii) Find the ratio of the volume when $t = 1$ to the volume when $t = 9$.

(iii) Find the ratio of the radius when $t = 1$ to the radius when $t = 9$.

Answer (i) ....

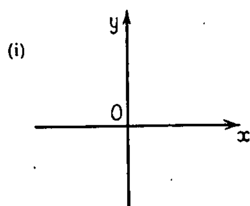
(ii) ....

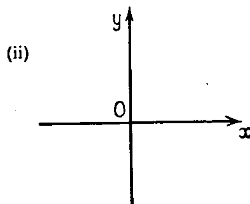
(iii) ....

27. Illustrate the relation between y and x by means of a *sketch* graph in the following cases:

(i) y sq. units is the area of a circle of radius x units.

(ii) x units is the length, and y units is the breadth of a rectangle of area 36 sq. units.



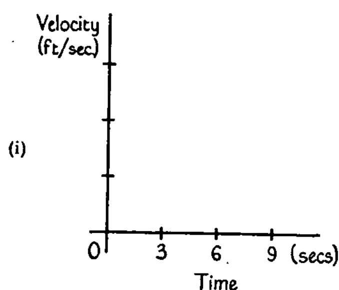


28. A body travelled with constant speed for 6 sec., covering a distance of 60 ft. Then its speed was uniformly retarded and the body came to rest 3 sec. later.

(i) Draw a graph showing the relation between velocity and time during these 9 sec. (Graduate the velocity axis.)

(ii) Calculate the total distance travelled in this time.

(i)



Answer (ii) . . . .

29. All quadrilaterals which are members of the set $\{R\}$ have property D. Is it necessarily true that quadrilaterals which have the property D are members of $\{R\}$?

Give an example to illustrate your answer.

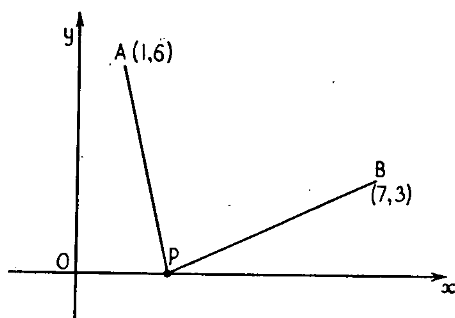
Answer . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

30.



A and B are fixed points; P is a variable point on the x-axis. Find the x-coordinate of P in the position in which the sum of the lenghts AP and PB is as small as possible.

Answer . . . .

The Association of Teachers of Mathematics (A.T.M.)

H. G. B. BROEKMAN

Utrecht

Easter Course 1974 te Nottingham (16 t/m 20 april '74)

Namens de Didaktiek Commissie van de NVWL bezocht ik de bovengenoemde 4-daagse bijeenkomst, o.a. om na te gaan of een dergelijke wijze van confereren – zowel kwa werkvorm als inhoudelijk – ook voor ons in Nederland mogelijkheden biedt.

Volgens de aankondiging was deze conferentie met 2 plenaire lezingen, 10 ééndaagse werkgroepen en 20 seminars van 3 × $1\frac{1}{2}$ uur een 'open course'. (An open residential Course for primary, secondary and college teachers interested in improving mathematics curricula and teaching methods in the light of present-day needs and methods.)
Verschillende seminars waren ook echt open, in de zin van: 'de deelnemers zorgen voor de vulling, de begeleider brengt alleen iets in als hem daar zeer nadrukkelijk om gevraagd wordt'. Er zit dezelfde filosofie achter die vele Engelse collega's – vooral bij het basisonderwijs en de eerste jaren van het vervolgonderwijs (vooral Comprehensive Schools) – proberen na te leven. Alleen zitten deze collega's wel wat moeilijk met de exameneisen.
Dit alles had tot gevolg dat er af en toe gesprekken plaatsvonden, die je als Nederlander wat wonderlijk aandoen. Zoals over de vraag of (a) de leraar leerlingen iets mag uitleggen dat dezen nog niet weten of (b) moeten leerlingen helemaal zelf achter een regel, principe, etc. komen die de leraar in z'n hoofd heeft, en zo ja (c) hoe moet de leerling (eventueel met hulp van de leraar) leren zelf de dingen die hij weet te combineren met door hem zelf opgedane nieuwe kennis.
Deze problemen, die mede te maken hebben met wat je al of niet onder efficientie in het onderwijs verstaat, hebben evenals bij ons ook een economische achtergrond.
Het is echter meer; misschien kan ik dat toelichten met een voorbeeld:

> In een van de seminars – Problems in Search of a Solution – werd door de deelnemers 3 typen problemen aangepakt (één type per sessie). (A) Trickery and Inspiration (B) Curiosities (C) Investigatory.
> In alle drie de sessies werd door de deelnemers aan de door de groepsleider uitgereikte problemen gewerkt, met hier en daar een gesprekje over

het doel van dit soort problemen voor jezelf als leraar, in deze, of gewijzigde, vorm voor de leerlingen, etc.
De gespreksleider had zich geprepareerd op een werkwijze die bestond uit een 3 kwartier laten werken van de groepjes en daarna gezamenlijk praten over het hoe en waarom van dit soort problemen, waarmee dan de stap naar het onderwijs gemaakt zou moeten worden. De groepjes waren echter fijn aan het werk en hij heeft de mensen rustig door laten werken. Want wie gaf hem het recht dat te verstoren en de door hem uitgestippelde doelstellingen aan de deelnemers op te dringen?

Een ander punt dat duidelijk naar voren kwam – en dat m.i. in de toekomst voor leraren op Nederlandse middenscholen erg belangrijk wordt – was dat vele Engelse collega's er van overtuigd zijn dat het werken met 'Mixed Ability Groups' (*echt* heterogene groepen) niet opgelost kan worden door standaardmateriaal (boeken, werkkaarten, etc.) van buiten. Binnen de school zal aan het leerplan* gewerkt moeten worden, want hoe kun je anders aansluiten bij de beginsituatie van de individuele leerling en zijn individuele leerproces volgen?! Of zoals Jerome S. Bruner het zegt in The Proces of Education: 'To communicate knowledge and to provide a model of competence, the teacher must be free to teach and to learn'.

Het in een werkgroep samenwerken met mensen uit zo'n verschillend nivo van onderwijs gaf soms problemen, maar deze waren juist aanleiding tot een gesprek dat tot een beter begrip voor elkaar leidde. Mede vanwege dit laatste punt lijkt het mij uiterst nuttig om hier in Nederland ook dergelijke bijeenkomsten te organiseren; echt open ontmoetingen tussen alle groeperingen van wiskundeleraren. In dat geval zou ik dan echter wel willen pleiten voor een rode draad van goed geplande en geleide seminars. Tenslotte zeg ik als echte Nederlander: 'time is money'.

* Onder leerplan wordt meer verstaan dan een opsomming van onderwerpen; nl. leerstofkeuze, leerstofordening, keuze van leer- en hulpmiddelen, keuze van toetsmethoden – zowel voor instaptoetsen, tussentijdse diagnostische toetsen als eindtoetsen – werkvormen, etc. etc.

De pedagogische en didaktische voorbereiding behorend bij het Staatsexamen Wiskunde m.o.-A en m.o.-B

In het K.B. van 21 juli 1958, Stb. 362 (Examenregeling bewijs van pedagogische en didaktische voorbereiding voor het geven van middelbaar onderwijs) wordt in artikel 8 een uitgewerkt programma in het vooruitzicht gesteld. In afwachting hiervan is door de examencommissie wiskunde m.o. in 1961 een voorlopige regeling bekendgemaakt van de examens ter verkrijging van het bewijs van pedagogische en didaktische voorbereiding bij de akte wiskunde m.o. A, resp. m.o. B (zie bijv. Euclides 37, 1961–1962, p. 270).
Gezien de veranderingen die er sindsdien in het secundair onderwijs hebben plaatsgehad, heeft de commissie gemeend deze regeling meer in overeenstemming met de praktijk te moeten brengen. Onderstaande regeling komt in de plaats van die van 1961 en zal tot nader aankondiging gelden voor de examens van januari 1976 en later.

Motivering van de herziening van het examenprogramma.

Sinds de instelling van de M.O. akten is het inzicht gegroeid, dat een degelijke vakkennis weliswaar een noodzakelijke voorwaarde is voor het goed functioneren van een leraar, maar geenszins een voldoende voorwaarde. Deze zienswijze leidde ertoe, dat in 1958 met de instelling van een examen voor pedagogische en didaktische voorbereiding een eerste voorzichtige stap werd gezet in de richting van de professionalisering van de aanstaande wiskundeleraar die zijn bevoegdheid wil behalen via de M.O. akten.
De opstellers van het examenprogramma verdienen nog steeds alle lof voor de weldoordachtheid van dat programma, waarbij rekening gehouden werd met datgene wat wenselijk was, maar ook met datgene wat toentertijd realiseerbaar was. Desondanks kan men bij de huidige part-time opleidingen voor de M.O. akten nog niet spreken van optimale opleiding voor het leraarsambt, vooral ook daarom dat noch de exameneisen noch de wijze van opleiden zijn afgeleid uit de doelstellingen van het onderwijs waarvoor de bevoegdheid wordt verlangd. Ter adstructie van deze stelling zij het volgende opgemerkt:

1 Het pakket voor het examen pedagogische en didaktische voorbereiding bevat uitsluitend *didaktische* eisen in verband met het onderwijs in de wis-

kunde. Er worden geen expliciete pedagogische eisen gesteld, hoogstens impliciete.

2 Onderwijservaring, al was het maar in de vorm van het bijwonen van lessen, wordt voor het behalen van onderwijsbevoegdheid niet vereist.

3 Nauw hierbij aansluitend zij opgemerkt dat de cursisten aan de M.O. opleidingen – gezien de beschikbare tijd – aangewezen zijn op kennis overdracht in college-vorm, en zelden of nooit in aanraking komen met voor de 'school' meer geschikte onderwijsvormen.

4 Het examen voor de wiskunde-akten is losgekoppeld van het examen voor de bijbehorende akte van pedagogische en didaktische bekwaamheid, met dien verstande dat het slagen voor het eerste examen een noodzakelijke voorwaarde is voor het deelnemen aan het tweede. Hoewel het bekend is, dat velen die een M.O.-akte begeren niet dingen naar de 'pedagogische' akte, zou het aanbeveling verdienen te bestuderen in hoeverre een integratie van beide examens mogelijk zou zijn, waarbij in het bijzonder in het onderwijs voor de 'vak'-akte aandacht geschonken zou moeten worden aan de achtergronden van de 'school' wiskunde.

Het hierbij gevoegde stuk moet gezien worden als een aanpassing van het examenprogramma aan de eisen die heden ten dage gesteld worden aan leraren belast met het wiskunde-onderwijs aan leerlingen van scholen voor H.A.V.O. en V.W.O. Er is gestreefd naar een compromis tussen het wenselijke en het mogelijke. Voor alles moesten de exameneisen zich aanpassen aan de huidige regelingen van subsidiëring waaraan de cursussen zijn gebonden en aan de dwingende eis van een redelijke studieduur.
Vooral deze laatste eis is de reden ervan dat een gedeelte algemene didaktiek achterwege is gebleven.

Omschrijving van het examenprogramma.

De commissie ziet de studie voor bovengenoemd examen niet als een garantie voor het goed functioneren als leraar, wel als een noodzakelijke bijdrage tot professionalisering van het leraarsberoep. Voor kandidaten zonder onderwijservaring kan hierdoor de oriënterende periode, die ieder beginnend leraar moet doormaken bekort worden.
Zolang hospiteren nog niet is voorgeschreven beveelt de commissie zulke kandidaten dringend aan te proberen gedurende enige tijd wiskundelessen aan een school voor voortgezet onderwijs bij te wonen. Deze hospiteerstage dient in overleg met de docent didaktiek van de opleiding, dan wel met de betrokken inspekteur geregeld te worden.
Door middel van een gesprek van maximaal drie kwartier zal getracht worden te beoordelen of de kandidaat voldoende inzicht heeft in een aantal problemen betreffende het wiskunde-onderwijs en in mogelijke oplossingen daarvan.

De commissie verwacht van de kandidaat:
- kennis van en inzicht in een aantal onderwerpen die hierna bij 1 en 2 zijn aangegeven en toegelicht;

- kennis van en inzicht in de opbouw van een leergang (zie hierna bij 3);
- een verslag van eigen werk (zie 4);
- enige literatuurstudie (zie 5); hier is ook een overzicht opgenomen waarin aangegeven staat waar de onderwerpen uit 1, 2 en 4 in bepaalde boeken zijn te vinden).

1 *Algemene problemen van het wiskunde-onderwijs.*
De onderwerpen 1.1 t/m 1.7 zowel voor akte m.o.-A als m.o.-B.

1.1 Doelstellingen en organisatie van het Voortgezet Onderwijs; de plaats die de wiskunde op onderscheiden schooltypen inneemt, in het bijzonder op die waarvoor de verlangde akte bevoegdheid geeft.

De kandidaat moet een globaal overzicht kunnen geven van doelstellingen en organisatie van het onderwijs, zoals dat in de mammoetwet is geregeld. Daarbij wordt onder meer gedacht aan een beschrijving van de verschillende schooltypen, de betekenis van de brugklassen, de mogelijkheden voor vertikale en horizontale doorstroming, examenregelingen en meer in het bijzonder aan de plaats die de wiskunde bij dit alles inneemt.

1.2 Doelstellingen van het wiskunde-onderwijs leerplannen; kriteria voor de keuze van de leerstof.

De kandidaat moet motieven kunnen noemen waarom wiskunde een plaats heeft in het secundair onderwijs; hij moet aspecten van wiskundige vorming kunnen noemen (bijv. leren algoritmisch denken, leren logisch denken, leren denken in structuren); hij moet op de hoogte zijn van tenminste een theorie over verschillende niveau's van (wiskundig) denken; hij moet een globaal overzicht kunnen geven van de inhoud van leerplannen; hij moet kriteria kunnen noemen op grond waarvan men tot de keuze van bepaalde leerstof kan komen. Een en ander zal hij met konkrete leerstofvoorbeelden moeten kunnen toelichten.

1.3 Stadia in het leerproces; het funktioneren van leerresultaten; het probleem van de motivatie bij het wiskunde-onderwijs.

De kandidaat moet tenminste één theorie kunnen geven over de verschillende fasen waarin het leren van begrippen plaats vindt en die op konkrete situaties kunnen toepassen (bijv. bij het ontwerpen van een lesplan of bij de analyse van een schoolboektekst); hij moet voor- en nadelen kunnen noemen van verschillende soorten leerresultaten (bijv. automatismen, kennis, inzicht) en van de wijze waarop ze funktioneren bij het verder leren; hij moet verschillende soorten motivatie kennen; hij moet voorwaarden kunnen noemen voor het optreden van positieve motivatie, resp. oorzaken van het optreden van negatieve motivatie.

1.4 Didaktische werkvormen en aktiviteit van leerlingen.

De kandidaat moet bekend zijn met verschillende didaktische werkvormen (bijv. doceren, leergesprek, groepswerk, vormen van individuele werkmethoden) en deze in relatie kunnen brengen met nagestreefde doelstellingen en verlangde leeraktiviteiten.

1.5 Hulpmiddelen.

De commissie verlangt hier inzicht in de rol die het schoolboek en andere geschreven teksten, het schoolbord en/of overhead projector spelen bij het wiskunde-onderwijs; inzicht in het gebruik van andere hulpmiddelen (modellen, platen, filmstrips, films, rekenliniaal, tabellen en overzichten, leerlingenbibliotheken) wordt op prijs gesteld.

1.6 Toetsingsproblemen.
De kandidaat zal verschillende soorten toetsen moeten kennen (bijv. eindtoets; het toetsen van de beginsituatie; diagnostische toets; toets als onderwijsleermiddel) en op de hoogte moeten zijn van beoordelingsproblematiek. Ook hier weer moet hij konkrete voorbeelden kunnen geven, resp. kunnen analyseren.

1.7. Problemen inzake de brugklassen.

Van de kandidaat wordt verwacht dat hij op de hoogte is van de motieven die geleid hebben tot het instellen van brugklassen c.q. brugperioden. Zowel ten aanzien van de aansluiting aan het basisonderwijs als van de voorbereiding op het onderwijs na de brugklassen.

Bovendien voor de akte m.o.-B:

1.8 Formalisering van de omgangstaal; de rol van figuren en van symbolen in het wiskunde-onderwijs; nomenclatuur.
De kandidaat moet inzicht tonen in het gebruik van variabelen, de rol die variabelen en wiskunde-symbolen spelen bij het mathematiseren van niet-wiskunde problemen en bij het formuleren van wiskunde-uitspraken in de omgangstaal. Verder moet hij op de hoogte zijn van de effekten die visuele en algebraïsche symbolen kunnen hebben op het leren. Hij moet de gangbare nomenclatuur kennen.

1.9 Problemen inzake de deduktieve structuur van de wiskunde.

De commissie verlangt inzicht in de betekenis van de woorden deduktie en induktie en in de rol die deze begrippen bij het wiskunde-onderwijs spelen. De kandidaat moet kunnen verklaren waarom een streng axiomatische opbouw in het wiskunde-onderwijs al dan niet aan te bevelen is.

1.10 Problemen inzake aansluiting op het tertiair onderwijs.

2 *Speciale problemen van het wiskunde-onderwijs.*
De commissie verwacht bij onderstaande onderwerpen een globaal inzicht hoe zij funktioneren in het secundaire onderwijs.
Van twee onderwerpen wordt een gedetailleerde kennis gevraagd van de wijze waarop deze in de bestudeerde leergang funktioneren (zie verder bij 3).
B-kandidaten moeten een van deze twee onderwerpen kiezen uit 2.10, 2.11 2.12.

Voor A- en B-kandidaten:
2.1 Verzamelingen
2.2 Funkties, afbeeldingen, relaties
2.3 Het gebruik van letters en variabelen
2.4 De uitbreiding van het getalbegrip
2.5 Vergelijkingen en ongelijkheden
2.6 Afbeeldingen in de meetkunde
2.7 Inleidingen in de wiskunde, overgang naar systemen met een deduktief karakter
2.8 Metriek
2.9 Het gebruik van algebraïsche methoden bij de meetkunde en omgekeerd

Bovendien voor de akte m.o.-B:
2.10 Problemen inzake het onderwijs in de analyse
2.11 Problemen inzake het onderwijs in de vectormeetkunde en de lineaire algebra
2.12 Problemen inzake het onderwijs in de waarschijnlijkheidsrekening en de statistiek

3 *Kennis van een leergang.*
De in 1 en 2 verlangde kennis en inzichten zal de kandidaat ook moeten kunnen demonstreren aan de hand van zijn kennis van een leergang voor wiskunde-onderwijs op een van de schooltypen waarvoor de verlangde akte bevoegdheid geeft. Dat zal moeten blijken uit:
– een globale kennis van de wiskundige opbouw en struktuur van de leergang en van de onderwijskundige principes, die aan de methode ten grondslag liggen; onder meer zal de kandidaat vertrouwd moeten zijn met begrippen als cursorische en concentrische leergang en 'telescoped reteaching'.
– een gedetailleerde kennis van de behandelingswijze van een tweetal onderwerpen, genoemd in 2 en de rol die deze onderwerpen in verband met een vertikale leerstofplanning in de gehele leergang spelen. De commissie laat de mogelijkheid open voor een vergelijking van behandelingswijzen van één onderwerp uit verschillende leergangen.
De commissie zal het op prijs stellen als de kandidaat over een en ander een beknopt schriftelijk rapport van één of twee pagina's kan overleggen.

4 *Andere onderwerpen uit de theorie en praktijk van het wiskunde-onderwijs.*
Van de kandidaat wordt verwacht, dat hij een verslag geeft van eigen werk op theoretisch of praktisch gebied dat betrekking heeft op het onderwijs op een van de schooltypen waarvoor de akte verlangd wordt. De kandidaat is vrij in de keuze en wijze van behandeling van zijn onderwerp. Het kan bijvoorbeeld een eigen onderzoekje zijn. Andere mogelijkheden zijn: een samenvatting van gelezen literatuur, een commentaar op een artikel, een verslag van een stage.
Kandidaten met onderwijservaring kunnen een onderwerp uit eigen praktijk nemen, zoals een verslag van een aantal gegeven lessen, een zelf ontwikkeld leerstofpakket, een foutenanalyse van proefwerken. De kandidaat wordt aanbevolen een kort, overzichtelijk, schriftelijk verslag van zijn werk over te leggen. Om de gedachten te bepalen denkt de commissie hier aan de omvang van een kort artikel, ongeveer vijf pagina's. Nadere toelichting ervan kan mondeling gegeven worden, in het gedeelte van de examentijd, dat aan het onderwerp gewijd zal worden.
Hierna volgt een lijst van mogelijke gebieden waaruit men een onderwerp zou kunnen kiezen. Aangeraden wordt datgene te kiezen wat het meest in overeenstemming is met de eigen persoonlijke belangstelling.

4.1 Ontwikkelingspsychologie
4.2 Psychologie van denken, leren en onderwijzen
4.3 Zwak- resp. hoogbegaafde leerlingen
4.4 Onderwijssociologie (bijv. school en samenleving, groepsprocessen, leiderschapfuncties)
4.5 Problemen inzake de middenschool
4.6 Problemen inzake het beroepsonderwijs i.h.b. ten aanzien van de wiskunde.
4.7 Taken van een leraar in en buiten de klassesituatie (bijv. klasseleraar, schooldecaan); evaluatie van eigen functionering in de school
4.8 Onderwijstechnologie
4.9 Functies van het schoolboek
4.10 Toepassing van de wiskunde op niet-wiskundige problemen
4.11 Geschiedenis van het wiskunde-onderwijs; wiskunde-onderwijs in het buitenland
4.12 Wiskunde op de basisschool
4.13 Computerkunde
4.14 Problemen inzake de leraarsopleiding
4.15 Recreatiewiskunde

5 *Literatuurstudie.*
De commissie verwacht dat de kandidaat bij de aanvang van het examen een lijst met gelezen literatuur overlegt. Ter oriëntatie is daartoe hierna een literatuurlijst opgenomen. Dat betekent niet dat de kandidaat beslist uit die lijst een keuze moet hebben gemaakt. In elk geval gaat de commissie ervan uit, dat elk werk dat op het lijstje van de kandidaat voorkomt door

hem of haar degelijk is bestudeerd. De examinatoren zullen niet onder de indruk komen van lange lijsten titels als de kandidaat daarbij slechts oppervlakkig over de inhoud kan spreken. In dit verband wijst de commissie op de mogelijkheid ook gedeelten van boeken op de literatuurlijst te zetten.

1 1 Hopman e.a., *Lessen over lessen, onderwijskundige informatie voor docenten*, Leiden 1973, 236 p.
2 Knoers, *Algemene onderwijskunde voor het voortgezet onderwijs*, Assen 1971, 240 p.
3 Van Gelder e.a., *Kind, school en samenleving*, Groningen 1968, 144 p.
4 De Groot, *Vijven en zessen*, Groningen 1966, 250 p.
5 Van Parreren, *Leren op school*, Groningen 1971, 76 p.
6 Van Parreren e.a., *Informatie over leren en onderwijzen*, Groningen 1972, 133 p.
7 Stellwag, *Begane wegen en onbetreden paden*, Groningen 1961, 406 p.
8 Stellwag e.a., *De leraar en zijn klas*, Groningen 1963, 141 p.
9 Verduin-Muller, *Leren van hospiteren*, Groningen 1967, 80 p.
10 Brochure Middenschool, (Ned. Genootschap voor leraren, postbus 407, Dordrecht) 116 p.

Vakdidaktische literatuur.

11 Brandenburg, *Modernisering van het wiskunde-onderwijs*, Groningen 1968, 147 p.
12 Van Dormolen, *Didaktiek van de wiskunde*, Utrecht 1974, 260 p.
13 Van Hiele-Geldof, *Didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het VHMO*, Purmerend 1957, 177 p.
14 Van Hiele, *Begrip en inzicht, werkboek van de wiskundedidaktiek*, Purmerend 1973, 230 p.
15 Skemp, *Wiskundig denken*, Aula-pocket 1973, 150 p.
16 Wansink e.a., *Didaktische oriëntatie voor wiskundeleraren*, drie delen, Groningen 1966–1971
17 Verschillende artikelen in *Euclides, tijdschrift voor de didaktiek van de wiskunde*, Groningen
18 Verschillende uitgaven van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde en van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs, Tiberdreef 4, Utrecht.
Toelichting op het leerplan wiskunde (brugklas)
Toelichting op het leerplan wiskunde (mavo, onderbouw, havo, vwo)
Toelichting op het leerplan wiskunde (bovenbouw, vwo)
L.B.O.-brochure
19 Serie Achtergronden: *Van Klassikaal naar meer gedifferentieerd onderwijs*, Katholiek Pedagogisch Studiecentrum, Den Bosch.

In het nu volgende schematisch overzicht wordt bij elk onderdeel uit 1, 2 en 4 aangegeven in welk boek hierover informatie voorkomt. Men bedenke hierbij dat deze informatie soms zeer oppervlakkig ter sprake komt, op andere plaatsen weer diepgaand behandeld wordt.

Achterg. 19	LBO	Toel. 18	Eucl. 17	Wans. 16	Skem. 15	Hiel. 14	Hiel. 13	Dorm. 12	Bran. 11	Broc. 10	Verd. 9	Stel. 8	Stel. 7	Parr. 6	Parr. 5	Groo. 4	Geld. 3	Knoe. 2	Hopm. 1	Hop. 1	
×				×		×		×	×	×	×						×	×	×	1.1	Doelstellingen alg.
	×	×		×		×		×	×								×		×	1.2	Doelstellingen wisk.
×	×			×	×	×		×					×	×	×		×	×	×	1.3	Leerproces
×	×			×		×		×					×	×				×	×	1.4	Werkvormen
				×				×										×	×	1.5	Hulpmiddelen
				×		×		×					×			×		×	×	1.6	Toetsing
				×		×	×			×										1.7	Brugklassen
				×	×	×		×	×											1.8	Formalisering
				×		×		×	×											1.9	Deduktieve str.
										×										1.10	Tertiair onderw.
		×		×				×												2.1	Verzamelingen
		×		×				×												2.2	Functies
		×		×		×		×												2.3	Algebra onderw.
		×		×		×		×												2.4	Getalbegrip
		×		×		×														2.5	Vergelijkingen
		×		×				×	×											2.6	Afbeeldingen
		×		×		×	×													2.7	Inleidingen
		×		×					×											2.8	Metriek
		×		×																2.9	Algebra-meetkunde
		×		×																2.10	Analyse
		×		×				×	×											2.11	Lineaire algebra
		×		×																2.12	W & S
	×			×				×	×											3	Leergangen
				×					×	×			×				×		×	4.1	Ontw. ps.
				×	×	×	×	×	×				×	×	×		×	×	×	4.2	Psych. v. h. leren
	×			×					×				×						×	4.3	Begaafdheden
				×	×					×	×	×	×				×	×	×	4.4	Onderw. soc.
										×										4.5	Middenschool
	×																		×	4.6	Beroepsonderw.
				×		×						×	×				×		×	4.7	Taken v. d. leraar
																			×	4.8	Technologie
				×				×												4.9	Schoolboek
																				4.10	Toepassingen
				×					×										×	4.11	Geschiedenis
																				4.12	Basisschool
				×																4.13	Computerkunde
				×	×	×		×	×		×								×	4.14	Leraarsopl.
																				4.15	Recreatie

Boekbespreking

Raymond Broeckx, *Vlakke analytische meetkunde*, Wiskunde De Rij 62, De Nederlandse Boekhandel, Antwerpen/Utrecht 1973, 294 blz., Bf 195.

Ook dit boek is bestemd voor de hoogste klasse van het secundair onderwijs.
De titel zou doen vermoeden, dat in België het onderwijs in de analytische meetkunde, dat in ons land tot het verleden behoort, gehandhaafd is. Dit vermoeden wordt niet bewaarheid, als men het boek doorleest. Methodisch komt het overeen met onze meetkunde met vectoren. Inhoudelijk niet; het gaat belangrijk dieper op de stof in. Men zou het veeleer een vervolg kunnen noemen op ons programma, dat reeds in deel 54 behandeld werd.
Twee manieren worden besproken om de ruimte uit te breiden. De eerste komt tot stand door over te gaan op homogene coördinaten. De ruimte wordt dan uitgebeid met de oneigenlijke punten. De tweede methode geschiedt door over te gaan op complexe coördinaten. Van beide methoden wordt een vruchtbaar gebruik gemaakt.
Aardig is dat de auteur zuch de moeite getroost heeft een beginstuk van de projectieve meetkunde te ontwikkelen. Het staat weliswaar los van de rest van het boek, maar geeft de leerling toch enig inzicht in de betekenis van de dubbelverhoudingen.
Verder passeert een scale van onderwerpen de revue die bij ons naar de universiteit verwezen zijn. Uitvoerig wordt de algemene tweedegraadskromme behandeld. De schrijver geeft een klassificatie van deze krommen en stelt de voorwaarde voor ontaarding op (in determinantvorm). Bij de klassificatie wordt gebruik gemaakt van de eigenwaarden van matrices om tot standaardgedaanten te komen. Op moderne manier wordt de pooltheorie behandeld annex het opsporen van asymptoten, van middellijnen en toegevoegde richtingen.
Een afzonderlijk hoofdstuk is gewijd aan de kegelsnedenbundels en de stelling van Pascal.
Al met al een gedegen stuk werk waarin veel wetenswaardigs te vinden is. De behandeling is duidelijk en overzichtelijk.

P.G.J. Vredenduin

SMP computing in mathematics. B.H. Blakeley, *Data processing*, Cambridge University Press, 1973, XI + 68 blz., £ 1,20.

De SMP heeft het plan een serie boekjes uit te geven waarin de computer en het gebruik ervan uitgelegd worden ten gerieve van leerlingen van het voortgezet onderwijs. Van deze serie is dit boekje het eerste.
Het is geen gemakkelijke opgave uit te leggen wat een computer is en waarvoor hij gebruikt kan worden. Het is moeilijk een goed begin te vinden. Het enige wat ik op dit alleraardigste boekje zou kunnen aanmerken is, dat het begin dan ook enigszins aarzelend is.
Zodra overgegaan wordt tot het behandelen van een concreet probleem, is de uitleg zeer helder. Als probleem wordt gekozen: een leraar heeft een cijferboekje waarin hij de scores noteert die door zijn leerlingen voor verschillende werkjes behaald worden. De computer wordt ingeschakeld om de rol van het cijferboekje over te nemen. Elke leerling krijgt een codenummer. Alle beginscores zijn 0. Na het eerste proefwerk worden de scores door de computer overgenomen. Na het tweede wordt in de computer opgeslagen de totaalscore van het eerste en tweede proefwerk, enz. Hiervoor wordt een blokschema opgesteld en een programma geschreven. Een didactisch fraaie vondst is aanvankelijk blokschema en programma naast elkaar af te drukken met de corresponderende bewerkingen op gelijke hoogte.

Volgende probleem. Sommige leerlingen hebben wegens ziekte een proefwerk niet gemaakt. Wat doet de computer? Om dit te verwerken worden in de computer niet alleen opgeslagen de totaalscores van iedere leerling, maar ook de voor elke leerling maximale score die hij heeft kunnen behalen.
We willen een indruk krijgen van de prestaties van iedere leerling en de leerlingen ordenen naar hun prestaties. De computer rekent de procentuele scores van iedere leerling uit. Nu volgt eerst in het algemeen een uiteenzetting hoe de computer een serie getallen naar grootte kan ordenen (twee manieren). Daarna de oplossing van de opgave de leerlingen naar hun prestaties te ordenen.
Er zijn twee parallelklassen. Van beide zijn de leerlingen naar hun prestaties geordend. Gevraagd deze twee ordeningen tot één ordening samen te stellen.
Tot slot is er een bank waar de leerlingen geld op storten kunnen en uiteraard ook geld van kunnen opnemen. De boekhouding van deze bank wordt door de computer verricht.
Een didactisch fraaie manier om de leerlingen enigszins wegwijs te maken in de mogelijkheden van een computer.

P.G.J. Vredenduin

L.L. Helms, *Einführung in die Potentialtheorie;* W. de Gruyter, Berlin/New York, 1973; 305 blz. prijs DM 48,—.

Dit boek is een zorgvuldige vertaling, door Prof. dr. J. Bliedtner, van het in 1969 bij Wily Interscience verschenen boek 'Introduction tot potential theory', dat in Euclides *46,* 198, 1971 is besproken.
Over de inhoud van het boek behoeft na de vermelde recensie nauwelijks iets nieuws gezegd te worden: het is een fraaie mathematische ontwikkeling van de klassieke potentiaaltheorie, waarbij het niet altijd even gemakkelijk is om de fysische oorsprong van een aantal problemen te ontdekken. Vergelijkt men dit boek met een moderne inleiding in de potentiaaltheorie, van theoretisch-fysisch standpunt uit geschreven (bijv. E. Martensen, Potentialtheorie; B.G. Teubner, Stuttgart, 1968), dan wordt men zich bewust van het verschil in aanpak en belangstelling. De overlap van behandelde onderwerpen is dan ook vrij klein, al is hij niet geheel afwezig (tenslotte hebben beide auteurs het over potentiaaltheorie!).
Zij die behoefte hebben aan een uiteenzetting, gebaseerd op fysische verschijnselen, moeten niet met het boek van Helms beginnen. Wil men doorgaan met het verdiepen van het mathematisch inzicht in de problemen rondom de potentiaaltheorie, dan is het boek een betrouwbare gids die sterk wordt aanbevolen.

W.J. Claas Sr.

P. M. Cohn, *Algebra,* Vol. 1, John Wiley & Sons, xii + 321 pp., prijs £6,50.

Ruim driehonderd bladzijden heeft P. M. Cohn nodig om zijn lezer – een Britse student met niet al te veel voorkennis, zo stelt hij zich voor – uit te leggen wat groepen, ringen en vectorruimten zijn, wat men er mee doen kan, en hoe dat gedaan moet worden. En al wie, in het vertrouwen daar alles van af te weten, meent dat minder pagina's ook voldoende geweest zouden zijn, zal bij het zien van het boek waarschijnlijk op beide punten zijn oordeel herzien: zo talrijk en verscheiden zijn de explicaties en motiveringen die de schrijver, in zijn streven gevolgd en begrepen te worden, door de tekst gestrooid heeft.
Door de gecombineerde behandeling van algebra en lineaire algebra is het boek hier te lande wellicht minder geschikt als leerboek. Als naslagwerk en bron voor opgaven kan het echter uitstekend dienst doen, en er is tenminste één Nederlander die met ongeduld de verschijning van deel 2 afwacht.

H. W. Lenstra, Jr.

P. L. Brinkman, *Handboek voor de communicatie in de wiskunde*, Agon Elsevier, Amsterdam/Brussel, 1974, 405 blz., *f* 45,–.

Uit 'woord vooraf'.
'Het is zorgvuldig samengesteld als veelzijdig hulpmiddel, te gebruiken bij al die behoeften, die men ontmoet bij het werken met de Engelse taal als communicatiemiddel in de wiskunde.'
Hiermee is dan 74% van de behoefte gedekt, maar het duits en het frans worden ook niet vergeten. Men vindt woordenlijsten: engels-nederlands en omgekeerd, nederlands-duits-frans en omgekeerd, bijzonderheden over de uitspraak van formules, vormen en getallen.

Dr. W. A. M. Burgers

Serie „Wiskunde-plus" bij Wolters-Noordhoff. Twee werkjes van A. J. Elsenaar, n.l.: „*Waar wiskunde begint*" ISBN 9001 293026, *f* 3,90 en „*Webben weven*" ISBN 9001 293018, *f* 4,90.

Afgezien van de dwaze gewoonte van de meeste handelsmensen, prijzen op of bij negens te laten eindigen (waar toch geen verstandig mens in trapt), zijn dit twee echt charmante boekjes. De charme bestaat hierin, dat ze zich niet alleen met succes teweerstellen tegen de oude slogan: Wiskunde is een r.. vak, maar sterker, ze brengen als nieuwe lente en als nieuw geluid het ontwakende gevoel over, *dat wiskunde zo mooi* is. En wel in die mate, dat ikzelf, als recensent, dit niet heb geweten.
De weinige bezwaren, die ik heb, kunnen m.i. bij herdruk gemakkelijk opgeheven worden. In „Waar wiskunde begint" vond ik (bladzijnummers tussen haken) enkele te moeilijke figuren (6), verwarring in de terminologie betreffende projectie en loodrechte projectie (8 en 15) tegenover (10 tot 14). Heeft de schrijver er wel aán gedacht dat de oppervlakten van de loodrechte projecties van een kubus met ribbe = 1 een continuum vormen van 1 tot en met $\sqrt{3}$? Alleen bij de bol zijn m.i. de maximale en de minimale projecties gelijk (11). De storende fout van het type 5 × 8 m als bedoeld is 5 m × 8 m komt geregeld voor (17). De opdrachten van (19) kunnen duidelijker geformuleerd worden. Gedrukte tekst op millimeterpapier is onrustig (23) en de bedoelde kleuter heeft er ten gevolge van een simpele vergissing geen levensruimte. Er is geen volledige consequentie tussen de opdrachten van (24) en volgende bladzijden. Omtrek is toch een getal? (25) Wat goed, dat de laatste problemen reversibel behandeld worden.
In „Webben weven" wordt onnodig de tegenwoordig zo brandende kwestie over $\mathbb{N}$ en 0 ter sprake gebracht (19). Wanneer men modul*o* zoveel werkt, (26), a.u.b. met ablativus, dan functioneren $\mathbb{N}$ noch $\mathbb{Z}$ meer; er is slechts een eindig aantal getalklassen. Dit is het enige, wat in dit fraaie boekje onvoldoende uit de verf komt. Weer ten onrechte cirkel*omtrek* (36). Heel consequent hanteert de auteur ook hier het reversibiliteitsbeginsel, als hij niet alleen uit de functies de webben laat vinden, maar ook uit de webben de functies. Zelfs in een speciaal hoofdstuk (38). Wat jammer, dat dit zo belangrijke principe niet overal, in onze schoolboeken, bij onze lessen, in de examens, wordt toegepast!

J. K. Timmer

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

Opgaven

325 Verdeel een kubus in zes congruente viervlakken. (B. Kootstra).

326 Een rechthoek kan verdeeld worden in rechthoeken die elk een zijde met lengte 1 hebben. Bewijs dat de lengte van minstens een van de zijden van de rechthoek geheel is. (meegedeeld door R. Troelstra).

Oplossingen

323 1975^{1974} wordt 1974-tallig geschreven. Gevraagd de laatste vier cijfers.
1975 = 1 – 1 (1974-tallig)
De 2e, 3e, 4e, ... macht hiervan zijn resp.
1–2–1, 1–3–3–1, 1–4–6–4–1, ...
Zodat de laatste viercijfers van 1975^{1974}, 1974-tallig geschreven, dreigen te worden:

$$\frac{1974 \cdot 1973 \cdot 1972}{2 \cdot 3}, \frac{1974 \cdot 1973}{2}, 1974, 1$$

Hierin is
1974 = 1–0 (1974-tallig)

$$\frac{1974 \cdot 1973}{2} = 1974 \cdot 986\tfrac{1}{2} = 986\text{–}987 \text{ (1974-tallig)}$$

$$\frac{1974 \cdot 1973 \cdot 1972}{2 \cdot 3} = 1974 \cdot \frac{1973 \cdot 986}{3}$$

Hierin is $1973 \cdot 986$ = een drievoud + 1, zodat $1974 \cdot \frac{1973 \cdot 986}{3}$ in het 1974-tallig stelsel eindigt op $\frac{1}{3} \cdot 1974 = 658$.

De laatste vier cijfers worden dus
1644 (= 658 + 986), 988, 0, 1

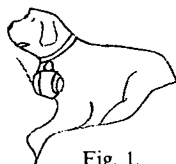


Fig. 1.

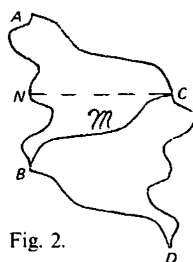


Fig. 2.

NB

Hoe is het mogelijk, dat fig. 1 een vlakverdeling mogelijk maakt?
De vlakverdeling berust op het volgende.
AC kan door schuifspiegeling overgaan in *CB* (translatie over *AN* en spiegeling om de middelloodlijn van *CN*).
AN kan door schuifspiegeling overgaan in *NB* (translatie over *AN* en spiegeling om *NB*).
Nu kan men naar hartelust zelf dergelijke figuurtjes ontwerpen. Begin met de rechthoekige driehoek *ANC*. Men kan daarna *AN* en *AC* willekeurig kiezen. Daarmee ligt de figuur vast.

Hier volgt de resulterende vlakverdeling.

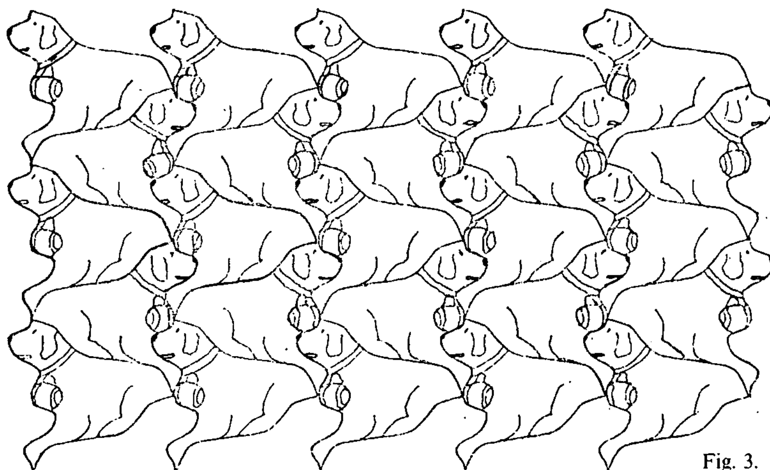


Fig. 3.

Bladvulling

De heer J. P. Priester (Rijswijk) is er verbaasd over dat in Euclides nooit speciale aandacht besteed wordt aan het wiskunde-onderwijs aan meisjes. In het jaar van de Vrouw zou dat best eens mogen. Vooral omdat dit onderwijs soms speciale problemen met zich meebrengt. Hij geeft daarvan het volgende voorbeeld.

Leraar. Hoeveel is $\frac{1000}{200}$?

Leerlinge. ...??
Leraar. Hoe pak je zoiets aan?
Leerlinge. Dan vereenvoudig je.
Leraar. Hoe doe je dat?

Leerlinge. Dan bepaal je de g.g.d. van 1000 en 200. Die g.g.d. is 200. Dan deel je 1000 en 200 allebei door 200.
1000 : 200 = 5 en 200 = 200 = 1.

Er komt dus $\frac{5}{1}$ en dat is gelijk aan 5.

P.G.J.V.

Bronvermelding

bij 'Machientjes' van J. J. M. Oerlemans (jrg. 50 nr. 3).
Als bron bij dit artikel is gebruikt handleiding 8 van de methode 'Denken en Rekenen' door drs. A. J. Th. Maassen.

MEDEDELINGEN

De Minister van Onderwijs en Wetenschappen

brengt ter kennis van belanghebbenden, dat zij die zich in het jaar 1975 wensen te onderwerpen aan de examens ter verkrijging van de hierna genoemde akten, *per briefkaart* – zonder toezending van andere bescheiden – vóór de vermelde datum een aanmeldingsformulier kunnen aanvragen bij de vermelde personen.

wiskunde M.O.	akte wiskunde M.O.A.	vóór 1 maart 1975	drs. H. W. Lenstra, Sr., Ranonkelstraat 54, Oosterhout.
wiskunde M.O.	akte wiskunde M.O.B.	vóór 1 maart 1975	dr. H. A. Gribnau, Frederik Hendriklaan 55, Haarlem.

Mededeling voor de abonnés op het Belgische tijdschrift

De Belgische Vereniging van Wiskundeleraren is uiteengevallen in twee verenigingen: een franstalige en een nederlandstalige. De nederlandstalige heet: Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars. Het gevolg is dat de beide tijdschriften voortaan niets met elkaar te maken hebben. Er hebben zich 40 leden aangemeld als abonné op het tijdschrift van de Belgische vereniging. Velen hebben de abonnementsprijs reeds aan mij voldaan. Zij krijgen dit jaar het tijdschrift van de Vlaamse Vereniging toegezonden. Degenen die de abonnementsprijs (*f*15,–) nog niet voldaan hebben, verzoek ik vriendelijk dit bedrag alsnog te willen storten op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Doorwerth. Op één ding moet ik helaas terugkomen. Toen de Belgische vereniging nog niet uiteengevallen was, was het mogelijk zonder prijsverhoging ook de franstalige uitgave van het tijdschrift te krijgen. Dit is nu niet meer mogelijk. Wie een dergelijk abonnement wenst, zou zich direct met de penningmeester van de Waalse vereniging moeten verstaan. Via Euclides kan dat niet meer.
Het spijt me dat dit bericht zo laat komt. Ik kon het echter niet opstellen, voordat ik de vereiste gegevens tot mijn beschikking had.

P. G. J. Vredenduin

Vakantiecursus voor leraren vwo en andere belangstellenden 1975

De jaarlijks door het Mathematisch Centrum te organiseren Vakantiecursus voor leraren VWO en andere belangstellenden zal dit jaar plaatsvinden
in *Amsterdam op 13 en 14 augustus 1975*
in *Eindhoven op 14 en 15 augustus 1975*

onderwerp: 'Discrete wiskunde'

1e dag:
1 Inleiding in de discrete wiskunde,
spreker: Prof. dr. H. Duparc – Techn. Hogeschool Delft;
2 Spelen op een graaf,
spreker: Prof. dr. N. G. de Bruijn, Techn. Hogeschool Eindhoven;
3 Graven in de speltheorie,
spreker: Drs. S. H. Tijs, Kath. Universiteit Nijmegen;

2e dag:
1 Toepassingen in de informatie- en communicatietechniek,
spreker: Prof. dr. ir. J. P. M. Schalkwijk, Techn. Hogeschool Eindhoven;
2 Reizen op een graaf,
spreker: Drs. J. K. Lenstra, Math. Centrum Amsterdam.

Nadere inlichtingen zijn te verkrijgen bij het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam – 1005, tel. 020-947272, tst. 39 of 64.

Amerikaanse assistentschappen in wiskunde Academisch jaar 1975–1976

De Wayne State University, Department of Mathematics, te Detroit, Michigan in de Verenigde Staten biedt enkele teaching assistantships in de wiskunde aan. Men moet maximaal 6 uur les geven per week aan eerste-jaars studenten. Collegegeld wordt gedeeltelijk kwijtgescholden en men verdient een salaris van ruim $3300, waarvan de rest van het collegegeld en het levensonderhoud bekostigd kunnen worden. Verlenging is mogelijk voor het behalen van een master's of doctor's graad. Een doctor's graad (Ph.D.) kan behaald worden in de volgende specialisaties van wiskunde:

- Algebra
- Abelian Groups
- Finite Groups
- Real Analysis
- Complex Analysis
- Harmonic Analysis
- Differential Equations
- Differential Geometry
- Homological Algebra
- Graph and Combinatorial Theory
- Functional Analysis
- Surface Area
- Point Set Topology
- Algebraic Topology
- Probability
- Mathematical Statistics
- Applied Mathematics
- Computer Science

In aanmerking komen *goede* studenten, die bij voorkeur hun doktoraalstudie voor de zomer 1975 voltooid zullen hebben.
Van de sollicitanten wordt verwacht dat zij een goede kennis van de engelse taal hebben.

Nadere inlichtingen en formulieren, onder opgave van opleiding en leeftijd, zo spoedig mogelijk aan te vragen bij het NEDERLAND-AMERIKA INSTITUUT, Afdeling Studievoorlichting, Prinsengracht 919, Amsterdam. Telefoon: 020-239425.

Voorwaarden en toelatings eisen practical training/USA (Stageprogramma USA)

Eisen voor deelname
Leeftijd: Minimumleeftijd is 21 jaar
Opleiding: Voltooide universitaire-, hogere beroepsopleiding of een daarmee gelijk te stellen vakopleiding.

Vakgebieden: Kandidaten in vele verschillende studierichtingen komen voor plaatsing in aanmerking (medici, verpleegsters, leerkrachten en rechtsgeleerden kunnen aan dit programma niet meedoen). Er is geen sluitingsdatum voor dit programma.

Ervaring: Men moet minstens 6 maanden praktijkervaring hebben in het beroep waarin men een 'traineeship' hoopt te verkrijgen. Een behoorlijke kennis van de engelse taal is vereist.

Traineeship: Wanneer een aanvraag door Practical Training/USA wordt geaccepteerd, zal het Programma proberen een passende werkkring te vinden, die zowel voor de werkgever als voor de trainee van nut zal zijn. Het duurt meestal 3 tot 6 maanden, soms langer, voordat een passende werkkring is gevonden. De duur van een traineeship is gewoonlijk een jaar, maar deze periode kan tot 18 maanden verlengd worden, mits de werkgever en de trainee dit samen overeenkomen.

De financiële aspekten: Werkervaring, opleiding en andere faktoren bepalen op welke voorwaarden (zoals werktijden, grootte van de toelage, vakantie, enz.) de werkgever de trainee in dienst neemt. De hoofdzaak is echter, dat de trainee in zijn/haar eigen vak een praktische opleiding krijgt. De werkgever wordt verzocht om een zodanige toelage te betalen, dat de kosten van levensonderhoud worden gedekt en tevens rekening gehouden wordt met een redelijk bedrag voor ontspanning. Het minimum salaris bedraagt $120 per week, maar de toelage is in vele gevallen groter. Reiskosten van en naar de plaats van bestemming zijn voor rekening van de trainee.

Practical Training/USA is goedgekeurd door de U.S. Department of State. Het Programma wordt beheerd door IAESTE/US, American City Building, Columbia, Maryland 21044, USA, een kulturele organisatie, die door kleine kontributies van amerikaanse bedrijven en andere instellingen wordt gesteund. Het grootste gedeelte van haar inkomen komt echter van de Programma's. Om de kosten van administratie en een ziekte- en ongevallen verzekering te dekken, wordt van de geplaatste deelnemers verwacht dat zij 7% van hun salaris aan IAESTE/US betalen.

Verdere inlichtingen en instrukties over de werkzaamheden en het doel van het Practical Training/USA Programma kan men in Nederland bij het NEDERLAND-AMERIKA INSTITUUT, Afdeling Studievoorlichting, Prinsengracht 919, Amsterdam verkrijgen. (Telefoon: 020–239425).

Examens Statistisch Assistent en Analist VVS 1975

De Vereniging voor Statistiek zal – onder toezicht van het ministerie van Economische Zaken – de examens Statistisch Assistent en Analist VVS afnemen op de volgende data:

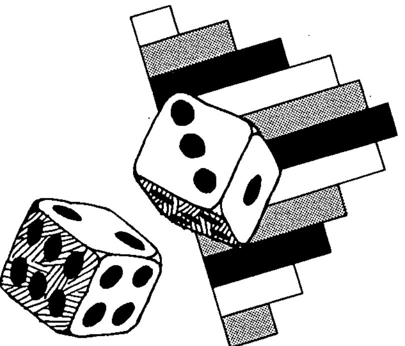
Statistisch Assistent VVS	
uitsluitend schriftelijk	vrijdag 30 mei 1975
Statistisch Analist VVS	
schriftelijk gedeelte	maandag 26 mei 1975
mondeling gedeelte	25, 26, 27 juni 1975.

Het schriftelijk (gedeelte van het) examen zal worden afgenomen 's middags van 13.30–16.30 uur in de grote zaal van Musis Sacrum, Velperplein, Arnhem: het mondelinge gedeelte in het Bouwcentrum, Weena 700, Rotterdam.
Eventuele verlengde examens (uitsluitend mondeling) zullen begin oktober worden afgenomen.

Degenen, die aan de examens wensen deel te nemen, dienen zich vóór 1 mei 1975 aan te melden bij de secretaris van de examencommissie, de heer R. Tillemans, Bolthagen 4, Zevenaar.
Aanmeldingsformulieren zijn verkrijgbaar bij het secretariaat van de VVS, mevrouw M. den Ouden, Weena 700, Rotterdam, tel. 010-116181 tst. 2126.

Mathematische Statistiek voor het vwo

Auteursgroep JAGT



Wolters-Noordhoff

INHOUD